

PMC 模型診斷演算法實作與分析

Implementation and Analysis of Diagnosis

Algorithm under the PMC model

指導教授：謝孫源 講座教授

專題成員：吳宗翰

開發工具：Apple clang version 17.0.0 (clang-1700.0.13.3)

測試環境：macOS Sequoia 15.4.1

一、簡介：

本專題以增強超方體（Enhanced Hypercube）作為多處理器系統的網路拓樸，實作並分析 PMC 模型下的故障診斷演算法。

Enhanced hypercube $Q_{n,k}$ ($2 \leq k \leq n$) 是一種由 hypercube 延伸而來的網路拓樸。 $Q_{n,k} = (U, E)$ 有 2^n 個節點，其中 $U = \{b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \mid b_i \in \{0,1\}\}$ ，若滿足以下兩條件之一，則節點 $x = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$ 和節點 y 相鄰

1. $y = b_n \dots b_{i+1} \bar{b}_i b_{i-1} \dots b_1$ for $1 \leq i \leq n$
2. $y = b_n \dots b_{k+1} \bar{b}_k \dots \bar{b}_1$

其中， $\bar{b}_i = 1 - b_i$ 。

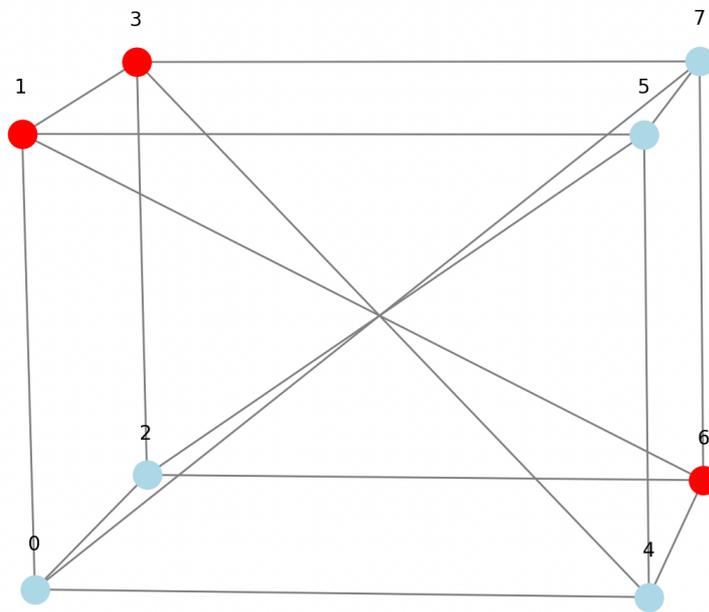
PMC 模型指的是拓樸網路中的每個相鄰節點之間彼此進行測試，若節點 u_i 經測試後認為節點 u_j 為故障（faulty）節點，則測試結果 a_{ij} 為 1，反之為 0。在測試的結果只有在 u_i 是健康（fault-free）節點的情況下才是可信的。所有的測試結果組成的集合稱為 syndrome。因為故障節點會給出不可信的結果，同一組故障節點集合（fault set） F 可能會給出不同的 syndrome。在系統 G 內，若故障節點集合的大小不超過 t ，則保證可以正確的找出故障節點集合，則 t 稱為這個系統 G 的 diagnosability

Dahbura–Masson 演算法是在 PMC 模型下，透過 syndrome 給出的資訊，可以建立 implied fault set $L(u_i)$ ， $L(u_i)$ 是假設 u_i 是健康節點的情況下，可以推論出的錯誤節點的集合。透過 implied fault set 可建立出 L-graph，在 L-graph $L = (U_L, E_L)$ 中，節點集合和原本的系統相同 $U_L = U$ ，若有一條邊 $(u_i, u_j) \in E_L$ ，則代表 u_i 或 u_j 其中必有且只有一個節點是故障的。我們可以透過找到 L-graph 的最小頂點覆蓋集合（minimum vertex cover set）來判斷出故障節點集合。找最小頂點覆蓋集合的通用算法是 NP-complete 問題，但在 L-graph 上我們可以透過尋找最大匹配（maximum matching）的方法有效率的找到，使得此演算法的時間複雜度為 $O(N^{2.5})$ ， N 為節點的總數。

實作部分使用 C 語言開發網路結構、測試邏輯與診斷機制，透過 python 進行視覺化展示。本專題亦進行理論複雜度與實際執行時間的比較分析，進一步評估演算法中各步驟的實際常數因子。

二、測試結果：

本專題會隨機產生一組數量小於系統 diagnosability 的故障節點集合，透過 Dahbura–Masson 演算法，找出錯誤節點的集合。圖一為 $Q_{3,3}$ 的結構，其中紅色的節點為故障節點，藍色為健康節點。



圖一