

仙人掌圖全動態多點源最短路徑問題之對數時間演算法

A Logarithmic Time Algorithm for the Fully Dynamic All-Pairs Shortest Path Problem in Cactus Graphs

指導教授：陳奇業 專題成員：丁士鈞

動機與目標

最短路徑問題是圖論中十分有代表性的問題，廣泛應用於網路通訊、交通等領域，然而現實中的圖大多是動態變化的，直接使用傳統的靜態演算法將十分耗時，因此研究可以動態修改邊權與圖結構的演算法是具有應用價值的。

文獻	圖型類別	更新操作支援	更新複雜度	查詢複雜度	邊權依賴
Ausiello, G.	一般圖	加邊/減權	$O(Cn)$ (均攤)	$O(1)$	依賴 C
Federickson, G. N.	平面圖	靜態	N/A	$O(n\sqrt{\log n})$	否
Feuerstein, E.	平面圖	加減邊權	$O(\log^3 n)$	$O(n\sqrt{\log \log n})$	否
Djidjev, H. N.	平面圖	加減邊權	較高 (需預處理)	$O(\log n)$	否
本研究	仙人掌圖	全動態 (增刪邊 + 加減權)	$O(\log n)$	$O(\log n)$	否

研究結果與前人比較

相對於前人做法，本研究雖只能在仙人掌圖上使用但實現了真正的全動態性，結合 Link Cut Tree/Top Tree 和線段樹優化建圖，在 $O(\log n)$ 複雜度下同時支援邊結構修改與邊權增減的更新操作，且本演算法不依賴邊權上限，可處理實數權重且具備處理負邊權（偵測負環）的能力，優於早期依賴整數範圍的演算法。

結論與未來展望

本演算法證明在仙人掌等特殊圖結構上存在更好的動態最短路演算法，可透過將變為圓方樹後的圖視為普通的樹，進一步加邊形成有層次的仙人掌結構，從而變為在一般圖上的演算法。亦可結合將一般圖近似為仙人掌的方法，使得本演算法變為一般圖上的高速近似演算法，進一步結合隨機近似和平行運算。此外本演算法的思想僅需稍作修改即可維護動態最小生成樹或動態連通性。