

基於魔術方塊結構分析 與兩階段IDA*搜尋之解法器實作

Implementation of a Rubik's Cube Solver Based on Cube Structure Analysis and Two-Phase IDA* Search

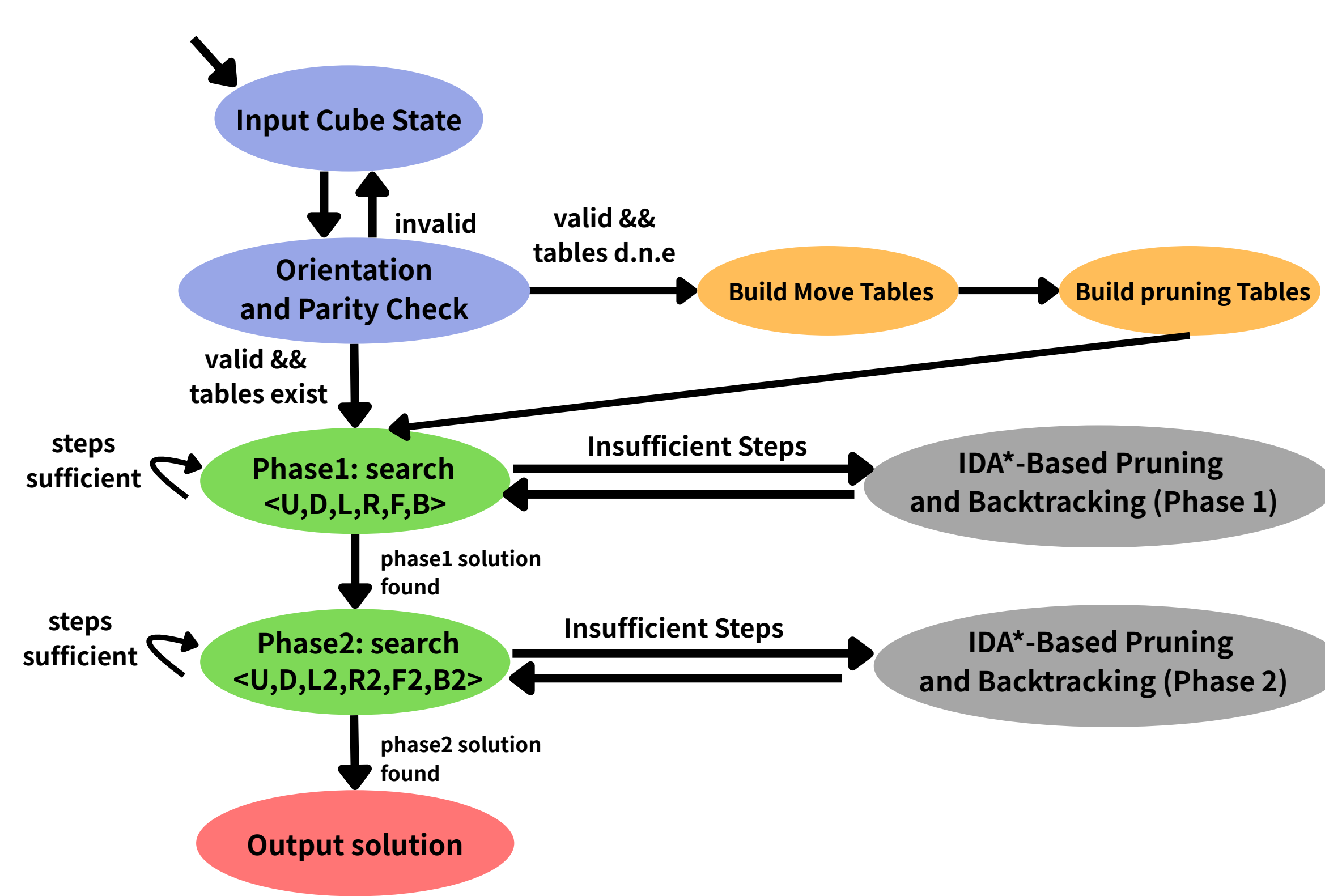
指導教授: 謝孫源 教授 專題生: 劉睿紘

研究目的與動機

魔術方塊不僅是一項廣為人知的益智玩具，其背後亦蘊含豐富的數學結構與演算法問題。其結構可用群論探討，但解法實務上可視為一大型狀態圖，如何在龐大的搜尋空間中權衡效率而找到能接受的解，在圖論、演算法和組合數學中是很值得探討的問題。

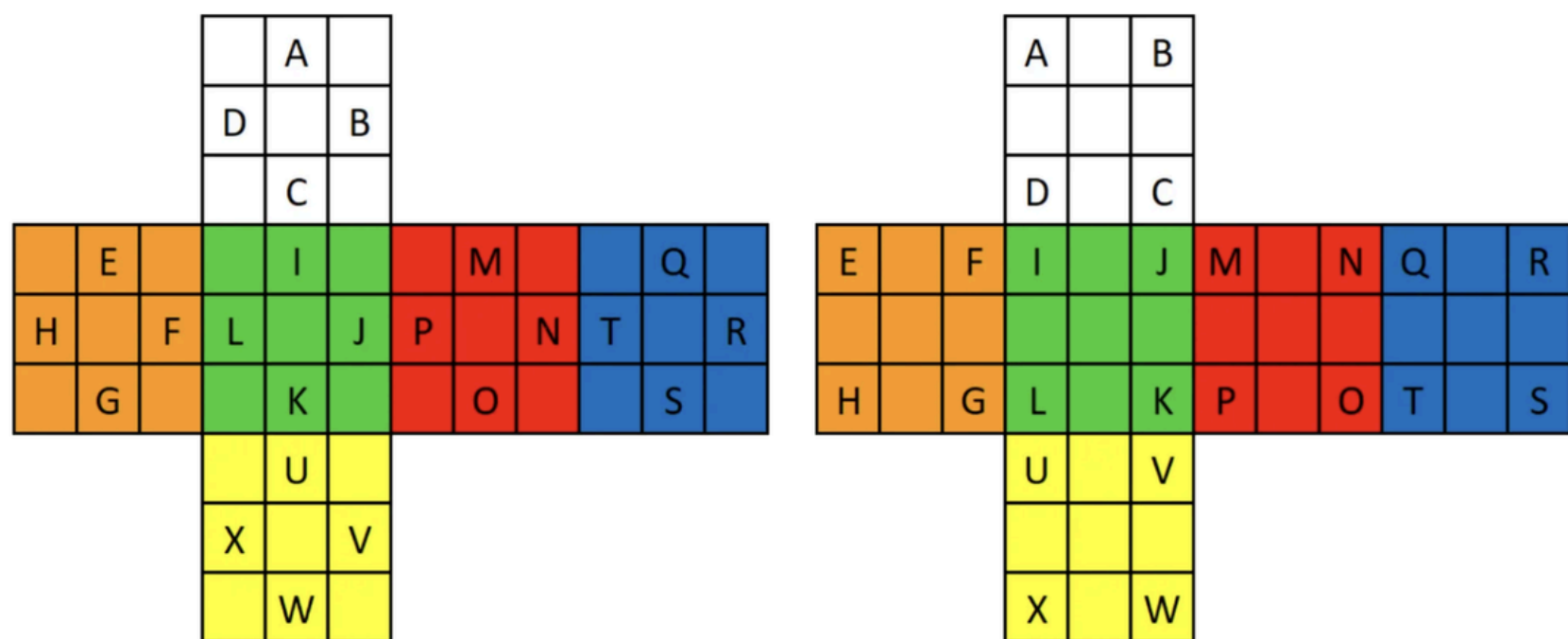
本研究希望從魔術方塊之數學特性出發，搭配兩段式IDA*搜尋演算法，探討如何將理論分析實際應用於求解，建立一套有理論基礎的魔術方塊解法系統。

解法器架構圖

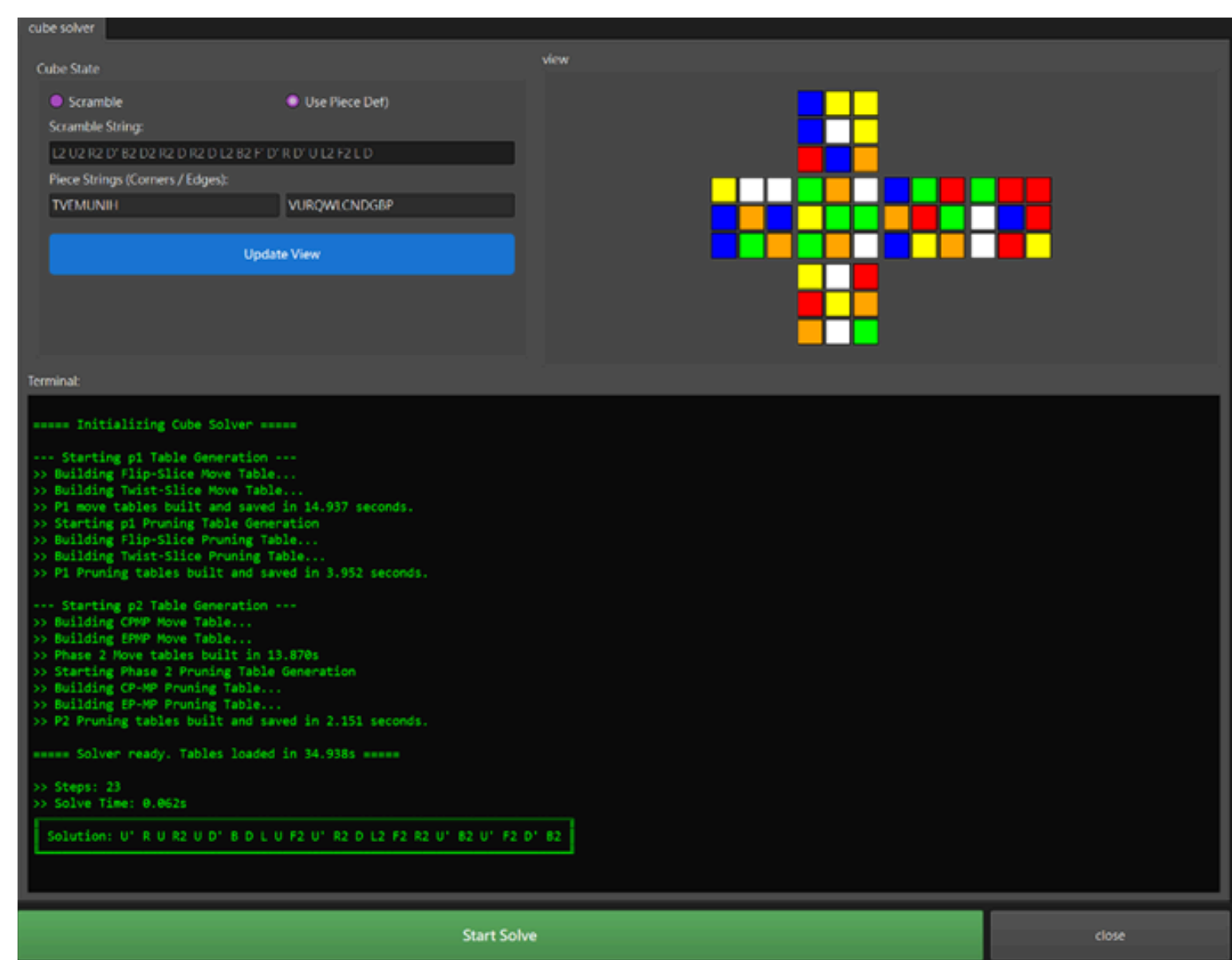


輸入狀態編碼

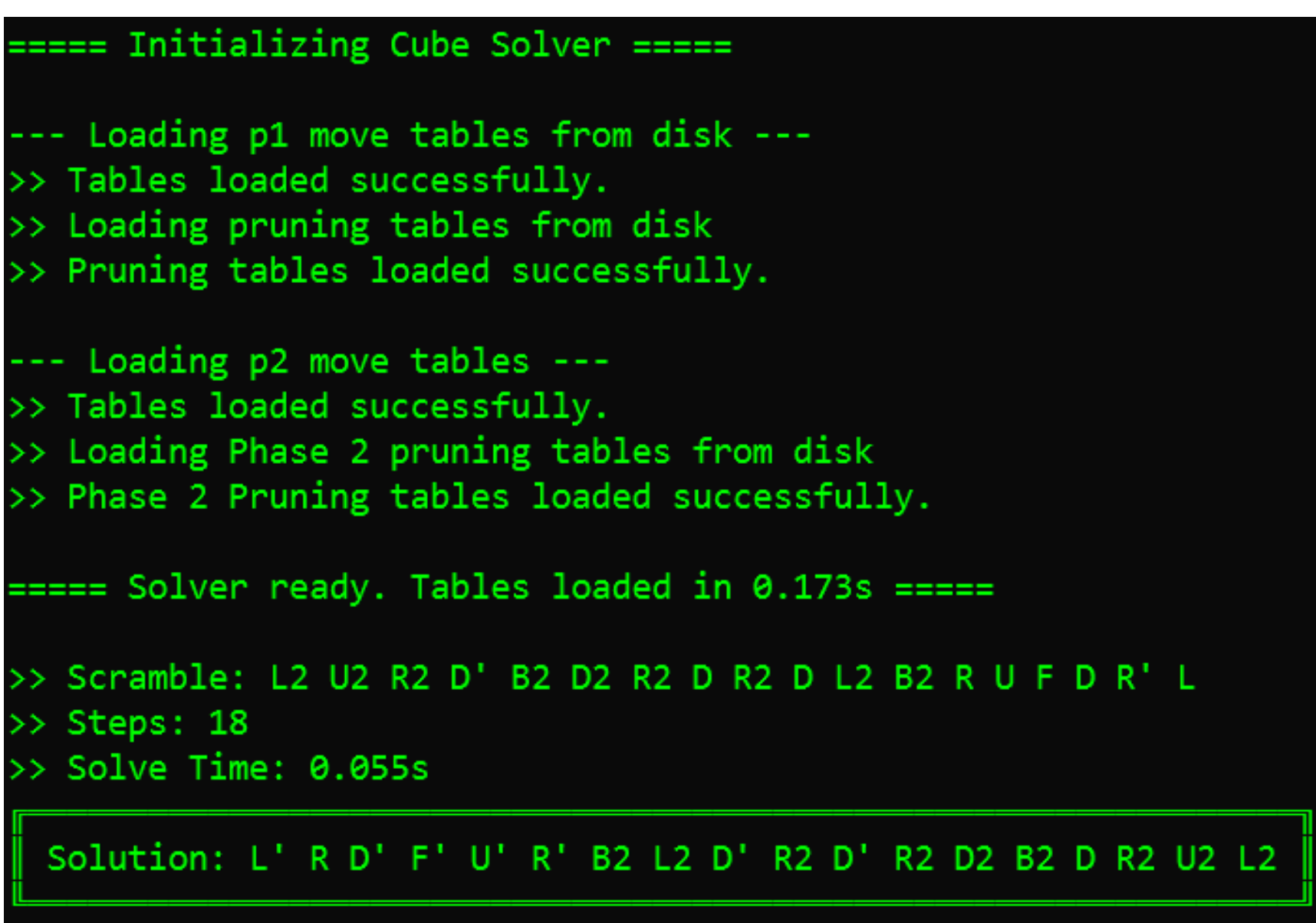
將每個邊角貼片進行編碼，可將方塊狀態快速輸入。



成果展示



求解器畫面截圖



打亂與求解輸出範例圖

研究與實作技術

理論研究方面，在未依賴實例窮舉解法的前提下，以決策樹為核心概念發想，結合遞迴推導與狀態分支分析，推導出 18 步下界本方法亦能進一步推算任意步數下可形成之狀態總數，並可抽象化延伸至更高階魔術方塊或其他變體。

解法器實作方面，將魔術方塊的每一個狀態視為圖中的點，每一種轉動視為圖上的邊，透過分析方塊狀態特徵，每項特徵映射至唯一整數來編碼，並建立完整之狀態轉移表可直接查詢，而無需依賴物件導向運算，降低運算成本並提升效率。最終採用兩段式IDA*演算法搜尋，系統若預先建置狀態轉移與剪枝表，平均可在約0.06秒內提出約23步的解法。

另外若手動輸入狀態，解法器將自動分析其方向性，並具創意性的採用bubble sort來判斷奇偶性是否成立，並顯現展開圖。

兩段式IDA*搜尋

解法器採用兩階段式 IDA*搜尋作為核心求解架構。第一階段先處理方向問題，可限制狀態空間以達到降群(group reduction)效果。第二階段則在降群後的空間搜尋，進一步完成剩餘排列問題。其搜尋核心來自以下公式:

$$\text{預期步數} = \text{目前步數} + \max(\text{table1}, \text{table2})$$

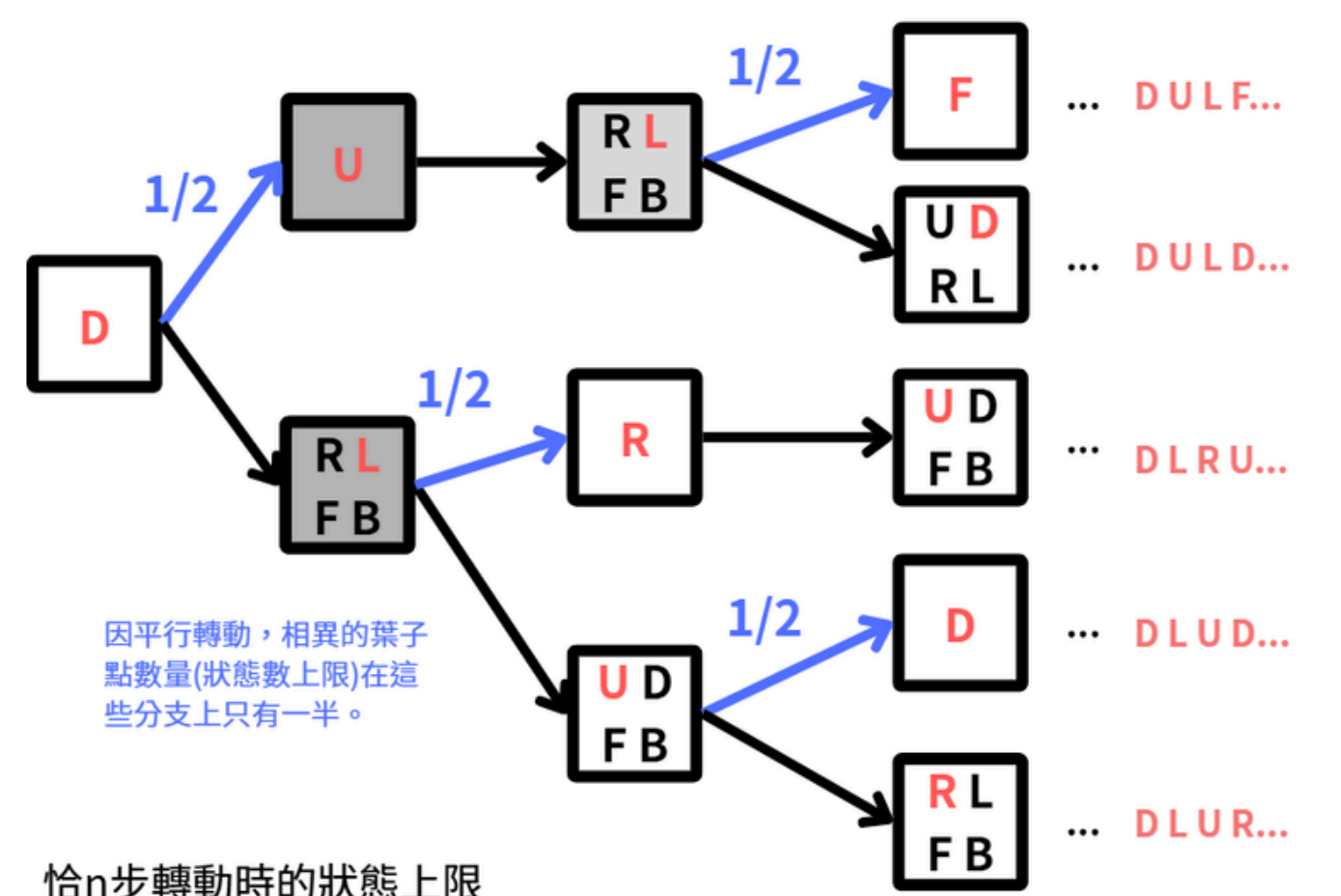
由於完整收錄所有狀態過於龐大，因此兩個階段分別針對不同特徵建立剪枝表並利用 BFS 預先計算各特徵距離復原所需步數。搜尋時再查表取得估計值，並取兩者較大值作為 heuristic。

未來展望

現階段實作僅採單一方向與入口搜尋，未來可進一步考慮不同方向與狀態 inverse 的特性，用多入口搜尋策略，在最終解法步數上取得更佳的结果。



Demo影片 專題簡報



$$3^n \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{4} (2 + \sqrt{6})^n + \frac{3 - \sqrt{6}}{4} (2 - \sqrt{6})^n \right)$$

半徑下界分析示意圖