

仙人掌圖全動態多點源最短路徑問題之對數時間演算法

A Logarithmic Time Algorithm for the Fully Dynamic All-Pairs Shortest Path Problem in Cactus Graphs

指導教授：陳奇業 專題成員：丁士鈞

問題介紹

動態最短路：

可以新增或刪除邊

可以修改邊權

可以查詢任意兩點最短距離

問題介紹

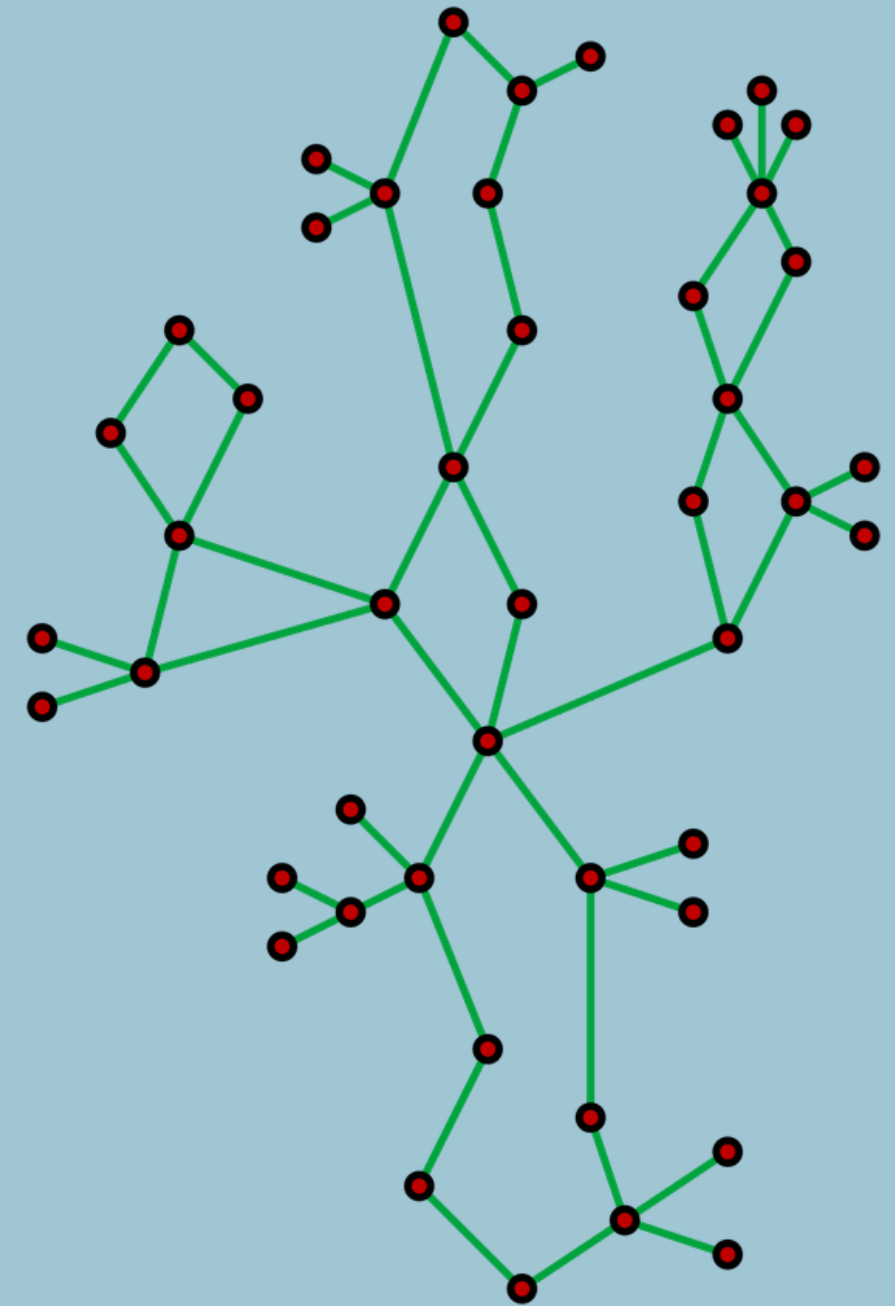
仙人掌圖：

任意一條邊，至多屬於一個環

故總邊數是 $\text{floor}(3(n-1)/2)$

不會有非簡單環

形如樹中間穿插簡單環



背景與動機

動態最短路的研究不多

仙人掌圖的性質保證不會有過多需要考慮的可能路徑

另一篇論文給出將一般圖近似為仙人掌圖的方法

結合本方法可得到 $O(\log n)$ 的動態最短路近似演算法

可用於交通地圖、網路通訊等領域

觀察與主要思路

由於動態森林可以用 Link Cut Tree(LCT) 或 Top Tree 實現要求操作

故主要的目標是使用其中一個來維護仙人掌圖

1. $\text{Link}(u, v, w)$: 將 u, v 連接一條邊權是 w 的邊。
2. $\text{Cut}(u, v)$: 將連接 u, v 的邊切斷。
3. $\text{Splay}(u)$: 透過一系列的樹旋轉，將節點 u 提升至其所屬 Splay Tree 的根節點，同時維持二元搜尋樹的性質。
4. $\text{Access}(u)$: 將從根節點到節點 u 的路徑全部變為實鏈，並將該路徑上的所有節點單獨組織成一棵 Splay Tree，使其餘不在路徑上的邊切換為虛鏈。
5. $\text{MakeRoot}(u)$: 結合 $\text{Access}(u)$ 與區間翻轉標記，將頂點 u 變更為整棵動態樹的全局根節點。
6. $\text{FindMin}(u)$: 在節點 u 所屬的連通塊中，尋找並回傳中序遍歷最左側（即深度最淺、最靠近根）的節點編號。

性質

在競技程式設計中

動態森林和偽樹（一棵樹加上一條邊，恰形成一個環）的最短路

都是十分經典且大多數人都會 $O(\log n)$ 解法的題目

其中偽樹的方法是把多的一條邊單獨分類討論

所以目標是將仙人掌的每個環也去掉一條邊討論

性質

又由於 LCT 和 Top Tree 保證了可以在 $O(\log n)$ 的時間

得到特定樹鏈上所維護的資料

故可以提前決定好環要如何拆開與其最短路徑

便可 $O(\log n)$ 得到任意最短路徑

特色與創新

先前的研究大多是基於一般圖或平面圖

幾乎沒有仙人掌圖的最短路徑研究

本方法是第一個仙人掌圖動態最短路的研究

且給出僅需對數時間的演算法

特色與創新

文獻	圖型類別	更新操作支援	更新複雜度	查詢複雜度	邊權依賴
Ausiello, G.	一般圖	加邊/減權	$O(Cn)$ (均攤)	$O(1)$	依賴 C
Federickson, G. N.	平面圖	靜態	N/A	$O(n\sqrt{\log n})$	否
Feuerstein, E.	平面圖	加減邊權	$O(\log^3 n)$	$O(n\sqrt{\log \log n})$	否
Djidjev, H. N.	平面圖	加減邊權	較高 (需預處理)	$O(\log n)$	否
本研究	仙人掌圖	全動態 (增刪邊 + 加減權)	$O(\log n)$	$O(\log n)$	否